关于 Alexander 的一个猜想

杨　路　张景中

(中国科学技术大学)

一、引　言

Alexander[1] 在他的《度量嵌入技巧应用于几何不等式》一文结束时曾提出如下猜想："设两个单形的顶点分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}$ 和 $p'_1, p'_2, \cdots, p'_{n+1}$；构作第三个单形 $p''_1, p''_2, \cdots, p''_{n+1}$，使得

$$|p''_i - p''_j|^2 = \frac{1}{2}\left[|p_i - p_j|^2 + |p'_i - p'_j|^2\right], \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n+1), \tag{1}$$

则应当有不等式

$$V''^2 \geqslant \frac{1}{2}[V^2 + V'^2], \tag{2}$$

这里 V, V', V'' 依次表示三个单形的体积."

上述这种从两个 n 维单形构作第三个单形的运算叫做"度量加". 在文献 [1] 中指出了单形的度量加法如何有效地应用于某些几何不等式. 因此，考虑这些单形的体积之间的关系是很自然的事.

本文将用反例指出 Alexander 的上述猜想不是真的. 然后说明如何修改这个命题使它成为真的.

我们只要令

$$|p'_i - p'_j| = 3|p_i - p_j|, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n+1), \tag{3}$$

这时三个单形相似，故有

$$V' = 3^n V. \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}[V^2 + V'^2] = \frac{1}{2}(3^{2n} + 1)V^2. \tag{5}$$

另一方面，从 (1) 式和(3)式有

$$|p''_i - p''_j| = \sqrt{5}\,|p_i - p_j|, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n+1), \tag{6}$$

于是

$$V''^2 = 5^n V^2. \tag{7}$$

当 $n \geqslant 2$ 时显然有 $5^n < \frac{1}{2} \cdot 3^{2n}$，从而

$$V''^2 < \frac{1}{2}(V^2 + V'^2). \tag{8}$$

这说明在欧氏空间 E^n 中 ($n \geqslant 2$) Alexander 的猜想不是真的.

本文 1981 年 1 月 9 日收到.

但是下面这个较弱的命题却是真的:

定理 1　在 n 维欧氏空间中我们有

$$V''^{\frac{2}{n}} \geqslant \frac{1}{2}(V^{\frac{2}{n}} + V'^{\frac{2}{n}}), \tag{9}$$

而等号当且仅当这些单形两两相似时成立.

在定理 1 中, V、V'、V'' 之意义和 Alexander 的猜想中所指者相同.

二、定理 1 的证明

定理 1 可叙述为下列与之等价的形式:

定理 1*　设 Ω, Ω', Ω'' 是 E^n 中的单形, 又令 a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n+1)$, $|\Omega|$、$|\Omega'|$、$|\Omega''|$ 分别表它们各棱的长度及它们的体积. 如果

$$c_{ij}^2 = a_{ij}^2 + b_{ij}^2, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n+1), \tag{10}$$

则有

$$|\Omega''|^{\frac{2}{n}} \geqslant |\Omega|^{\frac{2}{n}} + |\Omega'|^{\frac{2}{n}}. \tag{11}$$

而等号当且仅当这些单形两两相似时成立.

证　引进记号

$$\begin{cases} q_{ij} = \dfrac{1}{2}(a_{i,n+1}^2 + a_{j,n+1}^2 - a_{ij}^2), & (12) \\ r_{ij} = \dfrac{1}{2}(b_{i,n+1}^2 + b_{j,n+1}^2 - b_{ij}^2), & \\ Q = (q_{ij}), \quad R = (r_{ij}), & (13) \\ s_{ij}(\lambda) = q_{ij} + \lambda r_{ij}, & (14) \\ S(\lambda) = (s_{ij}(\lambda)), & \end{cases}$$

$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$;　Q, R, $S(\lambda)$ 都是 n 阶方阵.

$$f_{ij}(\lambda) = -\frac{1}{2}(a_{ij}^2 + \lambda b_{ij}^2), \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n+1), \tag{15}$$

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \cdots 1 \\ 1 & \\ \vdots & f_{ij}(\lambda) \\ 1 & \end{pmatrix} \quad (F(\lambda) \text{ 是 } n+2 \text{ 阶方阵}).$$

首先,我们考虑方程 $\operatorname{Det} F(\lambda) = 0$ 的根. 将此行列式的第零行(列)乘以 $-f_{i,n+1}(\lambda)$ (或 $-f_{n+1,j}(\lambda)$) 再加到第 i 行(j 列)上去可得

$$\operatorname{Det} F(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \cdots 1 \\ 1 & & \\ 1 & & f_{ij}(\lambda) \\ \vdots & & \\ 1 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \cdots 1 & 1 \\ 1 & & 0 \\ \vdots & s_{ij}(\lambda) & \vdots \\ 1 & & 0 \\ 1 & 0 \cdots 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\operatorname{Det} S(\lambda) = -\operatorname{Det}(Q + \lambda R).$$

又置

$$-\operatorname{Det} F(\lambda)=\operatorname{Det}(Q+\lambda R)=c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n. \tag{16}$$

这里Q和R都是实对称正定矩阵，从而所有这些系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 都是非负的，于是这个方程所有的根都是非正的. 由 Maclaurin[2] 不等式我们得到:

$$\frac{c_1}{c_0}\Big/\binom{n}{1} \geqslant\left[\frac{c_2}{c_0}\Big/\binom{n}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant\left[\frac{c_3}{c_0}\Big/\binom{n}{3}\right]^{\frac{1}{3}} \geqslant \cdots \geqslant\left[\frac{c_n}{c_0}\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{17}$$

从它可以导出

$$c_k \geqslant\binom{n}{k} c_n{}^{\frac{k}{n}} c_0{}^{1-\frac{k}{n}} \quad(k=0,1, \cdots, n); \tag{18}$$

另一方面，由直接计算可得

$$c_0=\operatorname{Det} R, \quad c_n=\operatorname{Det} Q, \tag{19}$$

这里Q和R分别是Ω和Ω'的 Gram 行列式，故有

$$c_0=n!^2|\Omega'|^2, \quad c_n=n!^2|\Omega|^2. \tag{20}$$

又，在(16)式中令 $\lambda=1$，得到

$$c_0+c_1+\cdots+c_n=-\operatorname{Det} F(1)=-\left|\begin{array}{cccc}0 & 1 & 1 \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ 1 & -\frac{1}{2} c_{ij}^2 & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{array}\right|=n!^2|\Omega''|^2, \tag{21}$$

这最后一步用到了单形体积公式(见文献[3]或[4])，然后将(18)式中诸不等式对k求和:

$$c_0+c_1+\cdots+c_n \geqslant \sum_{k=0}^n\binom{n}{k} c_0{}^{1-\frac{k}{n}} c_n{}^{\frac{k}{n}}=(c_0{}^{\frac{1}{n}}+c_n{}^{\frac{1}{n}})^n, \tag{22}$$

将(21)、(20)式代入(22)式就得到(11)式: $|\Omega''|^{\frac{2}{n}} \geqslant|\Omega|^{\frac{2}{n}}+|\Omega'|^{\frac{2}{n}}$.

最后来考虑(11)式中等式成立的充分必要条件. 当Ω与Ω'相似时，等式的成立是显然的. 反之如果(11)式的等式成立，则(18)式的等式也成立. 按 Maclaurin[2] 定理，这时 $\operatorname{Det}(Q+\lambda R)$ 应有n重根 $-\mu_0$，于是 $\operatorname{Rank}(Q-\mu_0 R)=0$，即: $Q=\mu_0 R$,

$$q_{ij}=\mu_0 r_{ij} \quad(i, j=1,2, \cdots, n). \tag{23}$$

再从(12)式得到

$$a_{ij}=\mu_0 b_{ij} \quad(i, j=1,2, \cdots, n). \tag{24}$$

即Ω与Ω'相似(于是Ω''也与它们相似). 条件的必要性证毕. 从而定理1得证.

参考文献

[1] Alexander, R., *The Geometry of Metric and Linear Space*, Springer-Verlag, 1975, 57—65.

[2] Beckenbach, E. F. & Bellman, R., *Inequalities*, Springer-Verlag, 1961, 11.

[3] Blumenthal, L. M., *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, 1953, 98.

[4] 杨路、张景中，数学学报，**23**(1980)，5:740—749.